

Sorina-Natalia KEREKEȘ • Teohar MIHADAȘ

Ghid

de  
pregătire  
a  
examenului  
de  
bacalaureat

# MATEMATICA

## PE ÎNȚELESUL TUTUROR

M\_mate-info

M\_șt-nat

Clasele IX-XII

#matematică  
#BAC  
#2027  
#SUCCES

Editura HOFFMAN  
2026

|                                                                                                |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| CUVÂNT ÎNAINTE.....                                                                            | 3          |
| INDEX.....                                                                                     | 6          |
| <b>Temă introductivă: Elemente de logică matematică, tipuri de raționamente, mulțimi .....</b> | <b>9</b>   |
| <b>Tema 1: Numere reale .....</b>                                                              | <b>17</b>  |
| I. Submulțimi de numere reale.....                                                             | 18         |
| II. Componente ale numerelor reale.....                                                        | 35         |
| III. Alte operații cu numerele reale .....                                                     | 38         |
| <b>POSTER Tema 1.....</b>                                                                      | <b>48</b>  |
| <b>Tema 2: Expresii și calcule algebrice .....</b>                                             | <b>49</b>  |
| I. Formule de calcul prescurtat.....                                                           | 50         |
| II. Aplicații ale formulelor de calcul prescurtat.....                                         | 55         |
| III. Ecuații algebrice, inecuații .....                                                        | 60         |
| IV. Alte ecuații cu numere reale.....                                                          | 70         |
| <b>POSTER Tema 2.....</b>                                                                      | <b>76</b>  |
| <b>Tema 3: Numere complexe .....</b>                                                           | <b>77</b>  |
| I. Reper cartezian.....                                                                        | 78         |
| II. Forma algebrică a unui număr complex.....                                                  | 81         |
| III. Operații cu numere complexe .....                                                         | 83         |
| IV. Rezolvarea unor ecuații cu numere complexe.....                                            | 89         |
| V. Reprezentarea geometrică a numerelor complexe .....                                         | 94         |
| <b>POSTER Tema 3.....</b>                                                                      | <b>98</b>  |
| <b>Tema 4: Funcții .....</b>                                                                   | <b>99</b>  |
| I. De la intuitiv spre abstract.....                                                           | 100        |
| II. Noțiunea de funcție.....                                                                   | 102        |
| III. Clase de funcții .....                                                                    | 111        |
| IV. Caracteristici ale unei funcții .....                                                      | 122        |
| <b>POSTER Tema 4.....</b>                                                                      | <b>130</b> |
| <b>Tema 5: Funcții elementare .....</b>                                                        | <b>131</b> |
| I. Funcția liniară – de gradul I .....                                                         | 132        |
| II. Funcția pătratică – de gradul al II-lea .....                                              | 137        |
| III. Funcții numerice particulare.....                                                         | 146        |
| <b>POSTER Tema 5.....</b>                                                                      | <b>150</b> |
| <b>Tema 6: Elemente de trigonometrie .....</b>                                                 | <b>151</b> |
| I. Triunghiul dreptunghic .....                                                                | 152        |
| II. Funcții trigonometrice definite pe cercul trigonometric .....                              | 154        |
| III. Funcțiile trigonometrice directe .....                                                    | 157        |
| IV. Formule trigonometrice .....                                                               | 161        |
| V. Funcțiile trigonometrice inverse .....                                                      | 166        |
| VI. Aplicații ale trigonometriei.....                                                          | 169        |
| <b>POSTER Tema 6.....</b>                                                                      | <b>176</b> |

|                                                                                  |            |
|----------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Tema 7: Elemente de combinatorică, probabilități și calcul financiar.....</b> | <b>177</b> |
| I. Probleme de numărare și combinatorică .....                                   | 178        |
| II. Probabilități .....                                                          | 192        |
| III. Elemente de calcul financiar .....                                          | 196        |
| <b>POSTER Tema 7 .....</b>                                                       | <b>200</b> |
| <b>Tema 8: Șiruri de numere reale .....</b>                                      | <b>201</b> |
| I. Șiruri de numere reale .....                                                  | 202        |
| II. Clase de șiruri.....                                                         | 204        |
| III. Șiruri particulare definite prin recurență.....                             | 210        |
| IV. Elemente de topologie pe mulțimea numerelor reale .....                      | 214        |
| V. Șiruri convergente / divergente .....                                         | 217        |
| <b>POSTER Tema 8 .....</b>                                                       | <b>230</b> |
| <b>Tema 9: Analiza datelor de tip tabelar .....</b>                              | <b>231</b> |
| I. Permutări și transpoziții .....                                               | 232        |
| II. Matrice.....                                                                 | 236        |
| III. Determinanți .....                                                          | 247        |
| IV. Aplicații ale determinantilor.....                                           | 254        |
| V. Sisteme de ecuații liniare .....                                              | 259        |
| <b>POSTER Tema 9 .....</b>                                                       | <b>264</b> |
| <b>Tema 10: Structuri algebrice și polinoame.....</b>                            | <b>265</b> |
| I. Lege de compoziție internă.....                                               | 266        |
| II. Structuri algebrice.....                                                     | 272        |
| III. Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ.....               | 280        |
| <b>POSTER Tema 10 .....</b>                                                      | <b>292</b> |
| <b>Tema 11: Geometrie vectorială, geometrie analitică.....</b>                   | <b>293</b> |
| I. Geometrie vectorială.....                                                     | 294        |
| II. Aplicații ale geometriei vectoriale.....                                     | 302        |
| III. Geometrie analitică .....                                                   | 306        |
| <b>POSTER Tema 11 .....</b>                                                      | <b>314</b> |
| <b>Tema 12: Derivate, primitive și integrale în studiul funcțiilor .....</b>     | <b>315</b> |
| I. Limite de funcții .....                                                       | 316        |
| II. Funcții continue.....                                                        | 329        |
| III. Funcții derivabile .....                                                    | 336        |
| IV. Funcții care admit primitive .....                                           | 344        |
| V. Funcții integrabile .....                                                     | 348        |
| <b>POSTER Tema 12 .....</b>                                                      | <b>354</b> |
| <b>Evaluare de la A la Z .....</b>                                               | <b>356</b> |
| <b>Teste recapitulative .....</b>                                                | <b>469</b> |
| <b>Bibliografie .....</b>                                                        | <b>479</b> |
| <b>Structura ghidului.....</b>                                                   | <b>480</b> |

# ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ, TIPURI DE RAȚIONAMENTE, MULȚIMI

**Dragi elevi,**

Pentru a înțelege și a rezolva situații, probleme, exerciții matematice, trebuie să știți să citiți un enunț, ce tip de raționament să aplicați și ce părți teoretice să alocați pentru rezolvare.

## → Citim și înțelegem un enunț matematic

Toată lumea citește cărți, tratate, știri, articole etc., însă o majoritate semnificativă nu înțelege ceea ce a citit dezvoltând propagarea „*analfabetismului funcțional*”, un flagel care diluează personalitatea individului făcându-l ușor de manipulat și controlat. Astfel, individul poate cădea în plasa dezinformării pentru că atât manualele de științe, cât și știrile sau materialele publicate pot conține erori sau informații cu un caracter viciat.

Epoca fluxului informațional, scris, citit abundă de informații false alături de informații reale. A crede tot ce este scris sau vorbit este o greșeală fundamentală prin care ființa rațională om își poate pierde propria rațiune și personalitate.

În paginile următoare vă propunem să parcurgeți un îndrumar care să vă arate drumul corect de la „*citiți*”, „*înțeles*”, „*argumentat*” spre „*demonstrație*” și „*rezolvare*”. Pentru toate aceste etape trebuie studiată, înțeleasă și aplicată **logica matematică**, care:

- ✓ Ne ajută să deosebim o explicație de o argumentare, precum să facem și distincție între convingere și manipulare.
- ✓ Ne ajută să dobândim încredere în propria gândire, iar dacă nu înțelegem, să cercetăm sau să întrebăm, să nu cădem în erori de gândire care duc la decizii greșite.
- ✓ Ne ajută să sintetizăm informații, fapt care duce la înțelegere și învățare.
- ✓ Ne ajută să folosim operații logice pentru a ne susține propriile idei, să gândim clar, coerent și legat, în paralel cu emoțiile și sentimentele prezentului.

## → Propoziții și predicate matematice

**În acest Ghid chenarele de forma alăturată conțin definiții prezente în Dex ale diferitelor noțiuni ale căror semantică se păstrează și în abstractul matematic.**

*Propoziție = cea mai mică unitate sintactică prin care se exprimă o idee, o judecată; enunț a cărui valoare de adevăr este întemeiată pe bază de reguli explicit exprimate. (dexonline.ro)*

Logica matematică studiază propozițiile din punctul de vedere al adevărului exprimat. O exprimare gramaticală este numită în logica matematică, **enunț**.



**O propoziție matematică** este un enunț, despre care putem spune, într-un anumit context că este adevărat sau fals, dar nu una și alta simultan.

- În funcție de adevărul exprimat o propoziție poate avea valoarea de adevăr notată cu  $v(p)$ , unde  $v(p) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } p \text{ este falsă} \\ 1, & \text{dacă } p \text{ este adevărată} \end{cases}$
- 0 și 1 sunt doar notații, ele nereprezentând numere



Principiile care stau la baza **logicii matematice**:

- **Principiul terțului exclus**: o propoziție poate lua valoarea de adevăr 0 sau 1;
- **Principiul noncontradicției**: o propoziție nu poate lua în același timp ambele valori de adevăr;
- **Principiul identității**: o propoziție își păstrează valoarea sa de adevăr.



Se numește **predicat** un enunț care depinde de una sau mai multe variabile și care pentru orice valori date variabilelor dintr-o anumită mulțime, devine propoziție logică matematică (adevărată sau falsă)  $p(x)$ .

**Predicat** = Parte principală a propoziției, care arată o acțiune, o stare sau o însușire a subiectului ([dextonline.ro](http://dextonline.ro)).

### Elementele **predicatului**

**Mulțimea predicatului (domeniul de definiție al predicatului)** = mulțimea din care variabilele predicatului își iau valori.

**Mulțimea de adevăr a predicatului** = mulțimea elementelor luate de variabile, pentru care predikatul devine propoziție matematică adevărată.

### → Ecuatii și inecuații – enunțuri matematice

Să analizăm o situație concretă:

▪ Imaginați-vă că țineți în mână un șurub și cineva vă aduce un sac de piulițe de diferite dimensiuni. În această situație *ce problemă ar trebui rezolvată?*

**Formularea problemei:** → să căutați în sac piulițe care potrivesc pe șurub;

→ să identificați piulițele din sac care nu potrivesc pe șurub.



Observații:

▪ o piuliță din sac poate avea același diametru cu al șurubului sau un diametru mai mare sau mai mic decât cel al șurubului și prin urmare ea poate fi considerată *variabilă sau necunoscută*.

▪ dacă vom căuta piulițe (care să potrivească pe șurub sau nu) în altă parte (în atelier, în garaj, într-un sertar, la un magazin etc.) vom obține tot atâtea probleme diferite.

▪ formularea problemei constituie un **enunț**.

Aceeași problemă cu aceleași observații poate fi enunțată și în alte situații cum ar fi:

→ O mână și un sac cu brățări de diferite mărimi;

→ Un deget și un sac cu inele de diferite dimensiuni;

→ O persoană și un sac de pantaloni de diferite mărimi;

→ O țevă și un sac de fittinguri de diferite mărimi etc.

În realitate există o multitudine de situații care necesită rezolvarea aceluiași tip de problemă (să găsim dintr-o mulțime cu elemente diferite acele elemente care potrivesc sau nu cu un obiect dat) ⇒ suntem conduși spre ideea de a cuprinde toate aceste situații posibile într-o singură formulare cu caracter general, noțiunea de **ecuație**.

**Ecuatiile, inecuațiile, identitățile constituie o clasă de predicate matematice**, iar mulțimile de adevăr pentru acestea reprezintă soluțiile ecuațiilor, inecuațiilor, respectiv, identităților (Tema 2).

### → Folosirea cuantificatorilor universal și existențial

Fie  $p(x), x \in D$  un predicat. Propoziția: „oricare ar fi  $x \in D, p(x)$  este adevărat”, se numește

**propoziție universală** atașată predicatului  $p(x)$ . Se notează  $\forall x \in \mathbb{R}, p(x)$ .

Simbolul  $\forall$  se citește: „oricare ar fi” și se numește **cuantificator universal**.



Fie  $p(x), x \in D$  un predicat. Propoziția: „există  $x \in D, p(x)$  pentru care  $p(x)$  este adevărat”, se numește **propoziție existențială** atașată predicatului  $p(x)$ . Se notează

$\exists x \in \mathbb{R}, p(x)$ . Simbolul  $\exists$  se citește: „există  $x$ ” și se numește **cuantificator existențial**.

▪ este importantă ordinea în care apar cei doi cuantificatori, astfel propoziția  $(\exists x)(\forall y)p(x; y)$  nu are aceeași valoare de adevăr ca și propoziția  $(\forall y)(\exists x)p(x; y)$ , deci prin permutarea cuantificatorilor valoarea de adevăr a propozițiilor nu se păstrează.



Prin  $(\exists x)(\forall y)p(x; y)$  se înțelege că există o variabilă  $x$  care este aceeași pentru oricare variabilă  $y$  (una singură pentru toate).

Prin  $(\forall y)(\exists x)p(x; y)$  se înțelege că pentru orice variabilă  $y$  (toate  $y$ ), există câte o variabilă  $x$  (pentru fiecare câte una).

### → Operații logice elementare

| Descrierea operațiilor logice                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Notatii                                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| ▪ <b>Negația (non <math>p</math>)</b> unei propoziții $p$ este o altă propoziție, care este adevărată când $p$ este falsă și care este falsă atunci când $p$ este adevărată.                                                                                                                                                         | $\text{non } p \quad \overline{p}$                 |
| ▪ <b>Conjunția (<math>p</math> și <math>q</math>)</b> propozițiilor $p, q$ este o altă propoziție care este adevărată doar dacă ambele sunt adevărate și falsă în caz contrar.                                                                                                                                                       | $p \text{ și } q \quad p \wedge q$                 |
| ▪ <b>Disjunția (<math>p</math> sau <math>q</math>)</b> propozițiilor $p, q$ este o altă propoziție care este adevărată când cel puțin una dintre ele este adevărată și falsă în caz contrar.                                                                                                                                         | $p \text{ sau } q \quad p \vee q$                  |
| ▪ <b>Implicația (dacă <math>p</math>, atunci <math>q</math>)</b> propozițiilor $p$ și $q$ este o nouă propoziție care este falsă când $p$ este adevărată și $q$ este falsă, iar în toate celelalte cazuri este adevărată.<br>-propoziția $p$ se numește <i>ipoteză</i> ;<br>-propoziția $q$ se numește <i>concluzia</i> implicației. | $p \text{ implică } q$<br>$p \rightarrow q$        |
| ▪ <b>Echivalența (<math>p</math> dacă și numai dacă)</b> propozițiilor $p$ și $q$ este o nouă propoziție care este adevărată atunci și numai atunci când ambele au aceeași valoare de adevăr.                                                                                                                                        | $p \text{ echivalent } q$<br>$p \leftrightarrow q$ |

### → Tipuri de raționamente matematice

**Raționamentul logic** reprezintă o activitate mentală, o operație a gândirii, care își propune să ajungă la o concluzie într-o manieră cât mai riguroasă și exactă.

Cele mai utilizate raționamente în matematică sunt:

- Deducția directă;
- Demonstrația prin reducere la absurd;
- Demonstrația prin inducție matematică.

#### ▪ Deducția directă

→ Instrumentul logic al *deducției* este implicația.

- Dacă într-un raționament matematic avem o propoziție generală adevărată atunci orice propoziție particulară, în legătură cu cea generală, va fi adevărată.

- Dacă într-o implicație adevărată, ipoteza este adevărată, atunci și concluzia este adevărată.

#### ▪ Metoda reducerii la absurd

→ O implicație de tipul „*dacă  $p$  (ipoteza) atunci  $q$  (concluzia)*” se poate demonstra prin **reducere la absurd**, raționament prin care se pleacă de la negația concluziei și se ajunge la negația ipotezei sau a unui adevăr cunoscut. Cu alte cuvinte, presupunem că ceea ce vrem să demonstrăm (*concluzia  $q$* ) este falsă și aplicând raționamente matematice ajungem să negăm *ipoteza  $p$*  sau ajungem la o contradicție cu ceva cunoscut.

**Raționament** = reprezintă o înlănțuire logică de judecăți, care duce la o concluzie. ([dexonline.ro](http://dexonline.ro))

**Exemplu:**

▪ Să se demonstreze că:  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Folosim *metoda reducerii prin absurd* și presupunem că  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$  el se poate scrie ca un număr rațional, adică o fracție ordinară ireductibilă.

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}^*, \text{ a.i. } (m; n) = 1 - \text{adică numerele } m \text{ și } n \text{ sunt prime între ele.}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{m}{n} \mid ( )^2 \Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2 \cdot n^2 \Rightarrow m:2 \Rightarrow \text{atunci } m \text{ este par, deci are forma}$$

$$m = 2k, k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (2k)^2 = 2 \cdot n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2 \quad n:2$$

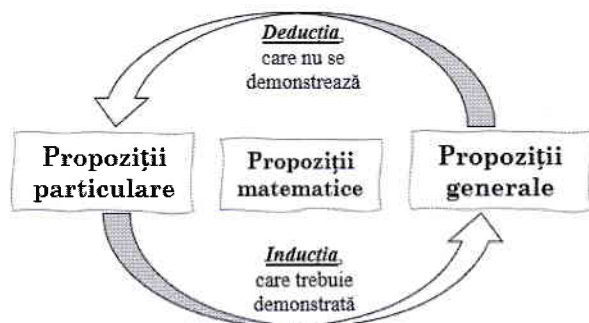
Concluzia este că numerele  $m$  și  $n$  sunt divizibile cu 2  $\Rightarrow (m; n) = 2$ , adică numerele îl au pe 2 ca divizor comun care este în contradicție cu „numerele sunt prime între ele

$\Rightarrow$  presupunerea făcută este falsă  $\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

## ▪ Metoda inducției matematice

A propune cuiva să rezolve permanent probleme pe care nu le știe rezolva, *induce* convingerea că nu poate înțelege matematica. Deci prin *inducție* se face să se creadă o afirmație fără a fi enunțată explicit.

*Inducție* = o formă fundamentală de raționament, care realizează trecerea de la particular la general (un procedeu de demonstrare a propozițiilor generale).

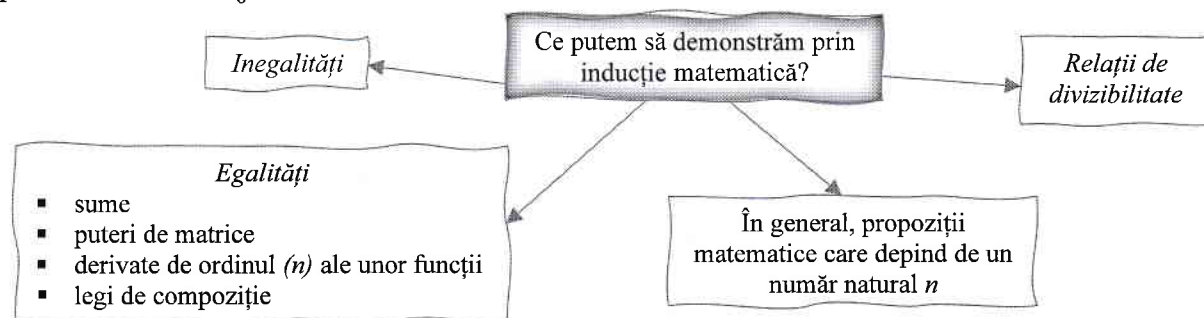


**Inducția matematică**  $\rightarrow$  metodă de raționament care conduce de la un număr de propoziții particulare adevărate, la o propoziție generală adevărată.

▪ **Principiul inducției matematice** (*metoda inducției matematice*) se aplică pentru propoziții de forma: „demonstrați că oricare ar fi numărul natural  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$  are loc  $P(n)$ , unde  $P(n)$  reprezintă un enunț care depinde de variabila naturală  $n$ ”.

*Etapele inducției matematice:*

1. *Etapa de verificare în care se verifică dacă  $P(n_0)$  este adevărată.*
2. *Etapa de demonstrație în care demonstrăm implicația  $P(n)$  adevărată  $\Rightarrow P(n+1)$  adevărată, pentru orice  $n \geq n_0$ .*



**Folosind principiul inducției matematice să se demonstreze relațiile:**

- Să se demonstreze că oricare ar fi numărul natural  $n \geq 1$  este adevărată egalitatea:

$$\sum_{k=1}^n 3^k = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 3}{2}.$$

Notăm cu  $P(n)$  propoziția dată  $\Rightarrow P(n): 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 3}{2}, n \geq 1$ .

*Etapă de verificare:*  $P(1): 3 = \frac{3^2 - 3}{2} \Rightarrow 3 = 3$ , deci prima condiție este îndeplinită.

*Etapă de demonstrație:* Vrem să demonstrăm că implicația  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$  este adevărată.

Enunțăm:  $P(n+1): 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n + 3^{n+1} = \frac{3^{n+2} - 3}{2}$

$$\underbrace{3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n}_{P(n) = \frac{3^{n+1} - 3}{2}} + 3^{n+1} = \frac{3^{n+1} - 3}{2} + 3^{n+1} = \frac{3^{n+1} - 3 + 2 \cdot 3^{n+1}}{2} = \frac{3 \cdot 3^{n+1} - 3}{2} = \frac{3^{n+2} - 3}{2}$$

În concluzie implicația  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$  este adevărată. Deci propoziția  $P(n)$  este adevărată pentru orice  $n \geq 1$ .



- Să se demonstreze că pentru orice număr natural  $n \geq 2$  este adevărată inegalitatea:

$$2^n \geq 2n - 1.$$

Notăm cu  $P(n)$  propoziția dată  $\Rightarrow P(n): 2^n \geq 2n - 1, n \geq 2$ .

*Etapă de verificare:*  $P(2): 2^2 \geq 2 \cdot 2 - 1 \Leftrightarrow 4 \geq 3 \Rightarrow$  relația este verificată.

*Etapă de demonstrație:* Vrem să demonstrăm că implicația  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$  este adevărată.

Enunțăm  $P(n+1): 2^{n+1} \geq 2(n+1) - 1 \Leftrightarrow 2^{n+1} \geq 2n + 1$ .

Din  $P(n) \Rightarrow 2^n \geq 2n - 1 \Big|_2 \Rightarrow 2^{n+1} \geq 4n - 2$ .

Comparăm:  $4n - 2 \geq 2n + 1 \Leftrightarrow 2n \geq 3 \Leftrightarrow n \geq \frac{3}{2} \Rightarrow n \geq 1,5$ .

Ținem cont de faptul că din inegalitatea  $a < b < c \Rightarrow a < c$

$\left. \begin{array}{l} 2^{n+1} \geq 4n - 2 \\ 4n - 2 \geq 2n + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2^{n+1} \geq 2n + 1$ . Așadar implicația  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$  este adevărată.

Deci propoziția  $P(n)$  este adevărată pentru orice  $n \geq 2$ .



- Să se demonstreze că  $3^{2n+2} - 2^{n+1}$  este divizibil cu 7 pentru orice număr natural  $n$  nenul.

Notăm cu  $P(n)$  propoziția dată  $\Rightarrow P(n): 3^{2n+2} - 2^{n+1} : 7, n \in \mathbb{N}^*$

*Etapă de verificare:*  $P(1): 3^4 - 2^2 = 77 : 7$ , deci prima condiție este îndeplinită.

*Etapă de demonstrație:* Demonstrăm că implicația  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$  este adevărată.

Enunțăm  $P(n+1): 3^{2n+4} - 2^{n+2} : 7$ , dar știm că  $P(n): 3^{2n+2} - 2^{n+1} : 7$  este adevărată

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } 3^{2n+2} - 2^{n+1} = 7k \Rightarrow 3^{2n+2} = 7k + 2^{n+1}.$$

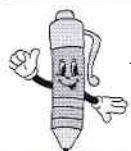
$$\begin{aligned} \text{Reluăm } P(n+1) &\Rightarrow 3^{2n+4} - 2^{n+2} = 3^{2n+2} \cdot 3^2 - 2^{n+2} = (7k + 2^{n+1}) \cdot 3^2 - 2^{n+2} = \\ &= 7k \cdot 3^2 + 3^2 \cdot 2^{n+1} - 2^{n+2} = 7 \cdot 9 \cdot k + 2^{n+1}(9 - 2) = 7(9k + 2^{n+1}) : 7. \end{aligned}$$

Așadar  $P(n)$  este adevărată pentru că și  $P(n+1)$  este adevărată.



→ Calculul unor sume și produse

|                | Simboluri                                                                                                               | Proprietăți                                                                                                                                                                                                                           |
|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Sume</b>    | $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ $\sum_{k=p}^n a_k = a_p + a_{p+1} + \dots + a_n$                           | <p>a). <math>\sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k</math></p> <p>b). <math>\sum_{k=1}^n c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^n a_k</math>    c). <math>\sum_{k=1}^n 1 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n</math></p> |
| <b>Produse</b> | $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{k=1}^n a_k$ $\prod_{k=p}^n a_k = a_p \cdot a_{p+1} \cdot \dots \cdot a_n$ | $\prod_{k=1}^n (a_k \cdot b_k) = \left( \prod_{k=1}^n a_k \right) \cdot \left( \prod_{k=1}^n b_k \right)$                                                                                                                             |



**Formule utile care se demonstrează prin inducție matematică și care se pot folosi în calculul altor sume**

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n a^k = a + a^2 + \dots + a^n = a \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1}, \quad a \neq 1$$

**Exerciții rezolvate:**



▪ să se calculeze suma de produse:  $S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) &= \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n (k^2 + k) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.
 \end{aligned}$$



▪ să se calculeze suma de fracții:  $S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} \right) = \\
 &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.
 \end{aligned}$$



▪ Să se calculeze suma  $S = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!$ ; unde  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! &= \sum_{k=1}^n k \cdot k! = \sum_{k=1}^n (k+1-1) \cdot k! = \sum_{k=1}^n [(k+1) \cdot k! - k!] = \\
 &= \sum_{k=1}^n [(k+1)! - k!] = 2! - 1! + 3! - 2! + 4! - 3! + \dots + (n+1)! - n! = (n+1)! - 1.
 \end{aligned}$$

→ **Mulțimi, reprezentare, descriere, elemente**

**Sinonime pentru mulțime:** ceată, șir, grămadă, multitudine, pluralitate, sumedenie, colectivitate...

→ **Genul proxim** este format din toate sinonimele acestea fiind termenii de referință ai definiției, având cel mai apropiat sens **de noțiunea mulțime**.

→ **Diferența specifică** nu poate fi formulată, deoarece nu putem găsi trăsături caracteristice **mulțimii** care să o deosebească de sinonimele cuprinse în genul ei proxim.



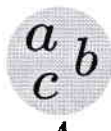
Prin mulțime înțelegem, un număr de lucruri, ființe sau alte entități de același fel, numite elemente ale mulțimii. **Mulțimea nu se definește, ea se descrie.**

**Definiția** este operația logică prin care se stabilește conținutul unei noțiuni. Adesea definirea unei noțiuni se face prin indicarea **genului proxim** și a **diferenței specifice**:

- **genul proxim** este termenul de referință al definiției, cel mai apropiat ca sens de noțiunea definită;
- **diferența specifică** este trăsătura caracteristică a noțiunii, care o deosebește de celelalte noțiuni cuprinse în genul său proxim.

Mulțimile se notează cu litere mari ale alfabetului:  $A, B, C, \dots, M, N, \dots$

▪ **Moduri de a descrie o mulțime:**

| Moduri de descriere                                                                                            | Exemple                                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| → Prin enumerarea tuturor elementelor sale                                                                     |                                                                                      |
| ▪ Mulțimea numerelor naturale cuprinse între 1 și 5 inclusiv 1, inclusiv 5 $\Rightarrow A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ |                                                                                      |
| → Printr-o proprietate comună elementelor sale                                                                 | → Prin diagrame Venn – Euler (desene)                                                |
| ▪ $A = \{x \mid x \text{ are proprietatea } p(x)\}$                                                            |    |
| ▪ $B = \{x \mid x - \text{cifră pară nenulă}\}$                                                                |   |
|                                                                                                                |  |
|                                                                                                                | $A \quad B \quad C$                                                                  |

▪ **Cardinalul unei mulțimi** este dat de numărul elementelor sale.

De exemplu dacă:  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow \text{card}.A = 5$

$B = \{x \mid x - \text{cifră pară nenulă}\} = \{2; 4; 6; 8\} \Rightarrow \text{card}.B = 4$

▪ **Tipuri de mulțimi****Clasificarea mulțimilor și exemple**

→ după numărul elementelor sale:

- **mulțimi finite:** mulțimea oamenilor de pe glob;
- **mulțimi infinite:** mulțimea numerelor naturale;
- **mulțimi vide:** mulțimea oamenilor cu 10 mâini.

→ posibilitatea de numărare a elementele lor:

- **mulțimi numărabile:** mulțimea locatarilor unui bloc;
- **mulțimi nenumărabile:** mulțimea punctelor care formează un segment de dreaptă, mulțimea numerelor reale.

→ după existența unor margini între care se regăsesc toate elementele lor:

- **mulțimi mărginite:** intervalul  $(0; 5]$ , mulțimea punctelor ce formează un segment de dreaptă.

→ după natura elementelor care le compun:

- **mulțimi numerice:** formate din numere naturale, întregi, raționale, iraționale, complexe;
- **alte tipuri de mulțimi:** formate din orice alte elemente diferite de numere (animale, litere, substanțe, case, forme de relief etc.).

→ Orice altă mulțime nenumerică se poate identifica cu o mulțime numerică:

- mulțimea oamenilor se identifică cu o parte a numerelor naturale;
- mulțimea pierderilor sau cea a câștigurilor se identifică cu o parte a numerelor întregi;
- mulțimea părților unor întregi se identifică cu mulțimea numerelor raționale;
- mulțimea punctelor unei drepte se identifică cu mulțimea numerelor reale;
- mulțimea punctelor unui plan se identifică cu mulțimea numerelor complexe.

